Intégrale généralisée

Notation :

Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, **dans ce cours**, la notation $|a, b|$ désignera un intervalle d'extrémités a, b qui peut être soit ouvert, soit fermé, soit semi ouvert selon les besoins. *(On pourra remarquer que dans cette notation, b peut être strictement plus petit que a. Par exemple, l'intervalle $|3, -\infty|$ a un sens.)*

Exemple 1 :

La notation $|3, 2|$ pourra désigner $[2, 3]$, $[2, 3[$, $]2, 3[$ ou encore $]2, 3]$ suivant les besoins.

La notation $|2, 3[$ désignera $[2, 3[$ ou $]2, 3[$ suivant les besoins.

I Rappels de notations, vocabulaire et d'intégration sur un intervalle $[a, b]$

Rappel de notation : pour désigner l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle I contenant a et b, (avec non nécessairement $a < b$) on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^b f$$

I-1 Intégration par partie sur un segment

Théorème *Intégration par partie*

Soit u, v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Exemple 2 :

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$

On pose les deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}])$ telles que

$$\begin{matrix} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{matrix}$$

Alors,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \underbrace{=}_{IPP} = \underbrace{[uv]_0^{\frac{\pi 2}{2}}}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$$

I-2 Changement de variable sur une intégrale $\int_a^b f$

Point de départ dans cette section : une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ que l'on souhaite simplifier.

I.2-a) Intégration par substitution et changement de variable $x = \varphi(t)$

Théorème *dit d'intégration par substitution / changement de variable*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, I un intervalle f et φ deux fonctions telles que :

- *$g \circ \varphi : [a, b] \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ soit bien définie*
- *$g : I \to \mathbb{R}$ soit continue*
- *$\varphi : [a, b] \to I$ soit $\mathcal{C}^1$*

alors on a

$$\int_a^b \underbrace{g(\varphi(t))\varphi'(t)}_{''f(t)''}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x)dx$$

Remarque :

La plupart du temps, ce théorème est fait pour être utilisé dans ce sens là :

$$\underbrace{\int_a^b \underbrace{g(\varphi(t))\varphi'(t)}_{''f(t)''}\,\mathrm{d}t}_{\text{départ}} = \underbrace{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x)dx}_{\text{arrivée}}$$

Méthode 1 : Calcul par identification directe des intervenants dans la formule

C'est la méthode la moins courante, mais l'application la plus directe de la formule de substitution :

Étant donné φ (qui est généralement donnée dans l'énoncé), on **repère dans l'intégrale** $\int_a^b f$ les fonctions φ et g en les mettant en valeur chacune de leur côté pour

$$\text{trouver } g \text{ telle que } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 3 :

Calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ avec le chang. de variable $\varphi(t) = -\frac{1}{t}$

Soit

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t} \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x > 0.$$

de cette manière, $f = g \circ \varphi$ est bien définie.

Le changement de variable φ est $\mathcal{C}^1([1,2])$, tandis que g est continue.

On constate également que

t	$1\ (= a)$	$2\ (= b)$
$\varphi(t)$	$-1\ (= \alpha)$	$-\frac{1}{2}\ (= \beta)$

.

La formule de substitution donne alors

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t \left(= \int_1^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^{-\frac{1}{t}}}_{g(\varphi(t))} \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\varphi'(t)} \right) \mathrm{d}t = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^x\,\mathrm{d}x = [e^x]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = \frac{1}{e}\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

Explications générales :

Observons le principe de substitution sur la formule :

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt = \right) \int_a^b g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta g(u)\,du$$

De gauche à droite :

- *$g(\varphi(t))$ se transforme en $g(u)$:*

$$\int_a^b \underline{g(\varphi(t))}\varphi'(t)\,dt \quad = \quad \int_\alpha^\beta \underline{g(x)}\,dx$$

D'où le fait qu'on rencontre souvent la notation

$$\boxed{x = \varphi(t)}$$

- *"$\varphi'(t)\,dt$" se transforme en "dx" :*

$$\int_a^b g(\varphi(t))\underline{\varphi'(t)\,dt} \quad = \quad \int_\alpha^\beta g(x)\,\underline{dx}$$

qui s'écrirait comme une "forme différentielle" (notion détaillée HP)

$$\boxed{dx = \varphi'(t)\,dt}$$

Commentaires :

L'explication précédente prend son sens de la manière suivante :

- *Pour le premier item précédente, : on intègre $g(\varphi(t))$ entre a et b, ce qui signifie qu'on intègre g entre "$\varphi(a)$" $= \alpha$ et "$\varphi(b)$" $= \beta$*

- *Le deuxième item $dx = \varphi'(t)\,dt$ se traduirait comme "la dérivée de x par-rapport à t est $\varphi'(t)$", ce qui, en PC, s'écrit également*

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

En pratique, "en maths", la théorie (qui n'est pas à votre programme) sur ces notations permet de considérer tout ceci comme des **calculs avec 3 quantités "différentes"** *qui sont "$dx, \varphi'(t)$ et dt". que l'on peut multiplier ou diviser à notre guise, avec les significations suivantes :*

$$dx\text{" = infime variation de } x\text{"}, \quad dt\text{" = infime variation de } t\text{"}$$

ainsi que par conséquent :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\text{infime variation de } \varphi(t)}{\text{infime variation de } t} = \varphi'(t) \quad (\text{cf. définition de la dérivée})$$

Ceci peut donc donner lieu à une rédaction du type suivant :

■ **Exemple 4** :

Re-calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ avec le chang. de variable $x = -\frac{1}{t}$

Soit
$$x = -\frac{1}{t} \text{ qui est } \mathcal{C}^1([1,2]), \text{ avec } \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On constate également que

t	1	2
x	-1	$-\frac{1}{2}$

On reconnait alors
$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x}$$

où $g = exp$ continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par formule de substitution,
$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^x\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{e}\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

I.2-b) Changement de variable (le vrai !) avec changement de variable $t = \psi(x)$

Dans cette partie, on suppose que $\boxed{\varphi' \text{ ne s'annule pas,}}$ *ce qui signifie en réalité que φ est* **strictement monotone**. *En notant $\psi = \varphi^{-1}$, on obtient alors*
$$x = \varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \psi(x)$$

Remarque :

Si φ' ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$, on peut alors écrire :
$$\boxed{\mathrm{d}t = \frac{1}{\varphi'(t)}\,\mathrm{d}x \quad ou \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varphi'(t)}}$$

Ce qui est cohérent avec la notation “dérivée de t par rapport à x” qui serait :
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \psi'(x) \quad ou \quad \mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x}$$

car par formule de dérivabilité de l'inverse : $\frac{1}{\varphi'(t)} = (\varphi^{-1})'(x) = \psi(x)$. où on rappelle au passage que φ est $\mathcal{C}^1$ ssi ψ est $\mathcal{C}^1$.

Remarque :

Dans le cas où φ (ou ψ) est bijective, le théorème de substitution peut s'écrire d'une manière qui semble moins abordable, mais qui pourtant est nettement plus pratique d'utilisation car on n'a pas à “deviner” le g et que les vérifications se font directement sur f et le changement de variable

Théorème *Changement de variable version “$t = \psi(x)$”*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I un intervalle, ainsi que f et ψ deux fonctions telles que :

- *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit continue*
- *$\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone*

alors on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi(x))\psi'(x)\,dx$$

Méthode 2 : On exprime t en fonction de x

Conrètement, dans les calculs, on peut poser
$$x = \varphi(t) \text{ (ou directement } t = \psi(x))$$

et, si φ' ne s'annule pas sur l'intervalle d'intégration :
$$\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Le remplacement peut donc être fait directement dans la formule de l'intégrale.

■ **Exemple 5** :

Re-calculons $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $x = -\frac{1}{t}$.

Posons $x = -\frac{1}{t}$ qui est donc un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif avec
$$t = -\frac{1}{x} \quad et \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2} > 0$$

sur les intervalles

t	1	2
x	1	$\frac{1}{2}$

La formule de changement de variable donne alors (on remplace t par $-\frac{1}{x}$ et dt par $\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$) :
$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{2}} \underbrace{e^x x^2}_{\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}} \underbrace{\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int_1^{\frac{1}{2}} e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e}\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

I-3 Primitivation

Pour désigner **une** primitive de f de variable $x \in I$, on peut écrire

$$\int^x f, \quad \text{ou} \quad \int^x f, \quad \text{ou souvent simplement} \quad \int f,$$

et **la** primitive F de f qui s'annule en $c \in I$ est définie pour tout $x \in I$ par

$$F(x) = \int_c^x f = \int_c^x f.$$

Ainsi, pour calculer des primitives, toutes les formules des intégrales peuvent s'adapter, notamment l'IPP et le changement de variable !

Exemple 6 :

Calculer une primitive de $x \sin x$ sur $\mathbb{R}$

On pose les deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que

Alors,
$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{array}$$

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \int u'v \underbrace{=}_{IPP} = uv - \int u'v = -x\cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x$$

Ainsi
$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \sin x - x \cos x +$$

Exemple 7 :

Calculons une primitive de $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ avec le changement de variable $u = -\frac{1}{x}$.

La fonction demandée étant continue, une primitive existe.
(Ceci est une fonction sous la forme $u'e^u$. Elle est donc théoriquement facile à intégrer mais on souhaite ici illustre le théorème de changement de variable dans une primitive.)
Posons $u = -\frac{1}{x}$ qui est donc un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif avec

$$x = -\frac{1}{u} \quad \textit{et} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u^2} > 0$$

La formule de changement de variable donne alors (on remplace x par $-\frac{1}{u}$ et $\mathrm{d}x$ par $\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$) :

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \mathrm{d}x = \int \underbrace{e^u u^2}_{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}} \underbrace{\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u}_{\mathrm{d}x} = \int e^u \, \mathrm{d}u = e^u = e^{-\frac{1}{x}}$$

II Convergence d'une intégrale (impropre ou) généralisée

Rappel de vocabulaire avant de commencer :

Définition

On rappelle qu'une fonction f est dite continue sur un intervalle $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et si $\lim\limits_{b^-} f = f(b)$.

Pour la deuxième condition, on dit souvent que *f est continue en b^-*.

Le même type de vocabulaire est évidemment valable sur des intervalles de type $[a, b[$ où f serait alors continue en a^+.

Exemple 8 :

Soit $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$. Alors f est continue sur $]-\infty, 0[$ **et** $[0 = \infty[$

Confusion

Dans l'exemple précédent, f n'est **pas** continue sur $]-\infty, 0[\cup [0 + \infty[$. En effet, $]-\infty, 0[\cup [0 + \infty[= \mathbb{R}$ et f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non continue en 0^-.

II-1 Déf. d'une intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert

Définition

Soit $f : [a; b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $\lim\limits_{\substack{x \mapsto b \\ x < b}} \displaystyle\int_a^x f$ existe et est <u>finie</u>, alors on dit que $\displaystyle\int_a^b f$ *converge (en b)*, *(ou qu'elle est convergente)* et dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f = \lim\limits_{\substack{x \mapsto b \\ x < b}} \int_a^x f$
- Sinon, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ *diverge* (en b), *(ou qu'elle est divergente)*

Remarque :

Dans le cas où $\lim\limits_{\substack{x \mapsto b \\ x < b}} \displaystyle\int_a^x f = \infty$, il peut arriver que l'on note $\displaystyle\int_a^b f = \infty$.

Exemples :

9 Montrons que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$:

La fonction $f : t \in [0;+\infty[\mapsto te^{-t^2}$ est continue, donc le seul problème est en $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$. On a $\int_0^x te^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right)$.

Ainsi, $\lim_{x\mapsto+\infty} \int_0^x te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ est convergente et $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}$.

10 Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente :

La fonction $f : t \in [1;+\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ est continue. Il y a donc un **problème en $+\infty$.** Soit $x \in [1;+\infty[$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente. On peut noter de plus que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = +\infty$

Définition

Soit $f :]a;b] \to \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Si $\lim_{x\mapsto a, x>a} \int_x^b f$ existe et est finie, alors on dit que $\int_a^b f$ *converge (en a)* et dans ce cas, on a

$$\int_a^b f = \lim_{x\mapsto a, x>a} \int_x^b f$$

- Sinon, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est *divergente.*

Exemple 11 :

Montrons que $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ est divergente.

La fonction $f : t \in]0;1] \mapsto \frac{1}{t}$ est continue. Il y a donc un **problème en 0.** Soit $x \in]0;1]$. On a

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

On en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ est divergente. On peut noter de plus que $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = +\infty$

Remarque :

Dans toute la suite, les propriétés ne concernant qu'un seul point critique seront énoncées dans le cas des intégrales du type $\int_a^b f$, où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue. Les cas où $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ se démontreront de la même manière par symétrie du raisonnement ou s'en déduisent par changement de variables.

Définition

On appelle *nature* d'une intégrale $\int_a^b f$ son caractère convergent ou divergent.

Remarque :

"Donner la nature d'une intégrale" signifie « dire si elle est convergente ou divergente ». De la même façon, dire que deux intégrales sont de *"même nature"* singifie qu'elles sont soit toutes deux convergentes, soit toutes deux divergentes.

Théorème *(Relation de Chasles)*

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de borne supérieure $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors, pour tout $a, c \in I$,

$$\int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_c^b f \quad \text{ont la même nature.}$$

et de plus, en cas de convergence, la relation de Chasles généralisée est vérifiée :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Remarque :

Cette prorpiété permettra de décomposer l'étude d'une intégrale sur des morceaux plus pratiques ou éventuellement déjà étudiés.

Exemple 12 :

On a vu que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge. Comme la fonction $t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int_a^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Confusion
Les intégrales ont peut être même nature mais attention, elles n'ont pas nécessairement même valeur. Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \neq \int_{-1}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \ (= \frac{1}{2e})$$

II-2 Intégrales faussement impropres

Propriété

Si

- f est continue sur $[a,b[$ où $\boxed{a,b\in\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire que l'intervalle est **borné**)
- et que f est prolongeable par continuité en b,

alors

- $\int_a^b f$ est convergente
- et $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$ où $\tilde{f}$ est la prolongée de f en b

Définition
Si f est continue sur $[a,b[$ et prolongeable en b par continuité, on dit que $\int_a^b f$ est *faussement impropre en b* (ou faussement impropre s'il n'y a pas de doute possible.)

■ **Exemple 13** :

$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ de même que $\int_0^1 \frac{\cos t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux faussement impropres :

$t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 par 1 et $t\mapsto \frac{\cos t-1}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 par $-\frac{1}{2}$

Bien vérifier que la borne est un nombre fini
Une intégrale ne peut être faussement impropre en l'infini.

■ **Exemple 14** :

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge, alors que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$.

En l'infini, il ne suffit donc pas de vérifier la convergence !

II-3 Définition d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Définition
Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ continue, où $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On dit que $\int_a^b f$ est *convergente*, s'il existe $c\in]a;b[$ tel que $\int_a^c f$ converge en a **et** $\int_c^b f$ converge en b.
Dans ce cas, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Sinon, on dit qu'elle *diverge.*

Remarque :
Si on veut démontrer la divergence, il faut ici montrer que **pour tout** $c\in]a;b[$, **l'une au moins** des intégrales $\int_a^c f$ ou $\int_c^b f$ diverge, ce qui n'est pas très pratique.
Nous verrons donc ici un exemple du cas de convergence et verrons ensuite comment simplifier la considération de la divergence.

■ **Exemple 15** :

$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge :

La fonction $t\mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. (On a donc un problème en $+\infty$ et $-\infty$: cas de l'intervalle ouvert)

- ⋆ On a déjà vu que $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (avec $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$).
- ⋆ Étudions $\int_{-\infty}^{0} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$: De la même façon que pour la première, $\forall x\leqslant 0$, on a $\int_x^0 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^x = -\frac{1}{2}\left(1-e^{-x^2}\right)$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\int_x^0 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$ et donc $\int_{-\infty}^0 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge avec

$$\int_{-\infty}^0 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$$

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge avec de plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Propriété

Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Si $\int_a^b f$ est convergente, alors, **pour tout** $c \in]a;b[$, on a $\int_a^c f$ converge en a et $\int_c^b f$ converge en b. De plus, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- S'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\int_a^c f$ diverge en a ou $\int_c^b f$ diverge en b, alors $\int_a^b f$ diverge.

Exemple 16 :

Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge :

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Elle admet donc un problème en 0 et en $+\infty$. (cas de l'intervalle ouvert)

$\star$ Étude du problème en 0 : étudions par exemple $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt$:

On pose $x \in]0;+\infty[$. $\int_x^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge et donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge.

Il n'y a pas de forme indéterminée dans la relation de Chasles

La propriété dit bien qu'il suffit que l'une des deux partie diverge pour avoir la divergence. Cela signifie en particulier que si les deux parties divergent, ce n'est **pas** une forme indéterminée...

II-4 Définition d'une intégrale généralisée sur une réunion d'intervalles ouverts

Erreur classique :

Considérons $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$. Il y a une erreur dans le calcul ci-dessous :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx \quad = \quad \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2 < 0 \quad \textbf{incohérent} \text{ avec le fait que } \frac{1}{x^2} \geqslant 0$$

L'erreur vient du fait que l'on a oublié de vérifier la continuité de la fonction sur $[-1,1]$. On observe en effet que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas continue en 0. Dans ce cas, il faut découper l'intégrale suivant le principe de la définition ci-dessous.

Définition

Soit $f :]a;c[\cup]c,b[\to \mathbb{R}$ continue, où $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $a < c < b$.

On dit que $\int_a^b f$ est *convergente*, si $\int_a^c f$ converge en a et c **et** si $\int_c^b f$ converge en b et c. Sinon, on dit qu'elle *diverge*.

Exemple 17 :

$\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge :

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[-1,0[$ et $]0,1]$. Or, par calcul direct de primitive, on trouve que $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge. Cela suffit pour affirmer que $\int_{-1}^1 \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge.

Notation :

Dans la suite du cours, I désignera un intervalle ou une réunion d'intervalles ouverts, fermés, ou semi-ouverts, qu'ils soient bornés ou non. Dans ce cas, $\int_I f$ désignera $\int_a^b f$ où $a = \min I$ et $b = \max I$.

Remarque :

Cette notation ne pourra être utilisée que dans le cas où l'ordre des bornes n'a pas d'importance. Par exemple, pour $I = [0,3]$, $\int_I f = \int_0^3 f$ n'est a priori pas égale à $\int_3^0 f$.

III Manipulation des intégrales impropres

III-1 Linéarité

Théorème *de linéarité de l'intégrale*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\int_I f$ *et* $\int_I g$ *sont convergentes,* **alors** $\int_I (f + \lambda g)$ *est convergente et dans ce cas*

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$$

Si...alors...

La réciproque est fausse : il suffit de prendre n'importe quelle fonction f telle que $\int_I f$ est divergente. Par ex,
$$\int_0^{+\infty} 1+(-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$$
mais
$$\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} (-1)\,\mathrm{d}t \text{ est une forme indéterminée}$$

III-2 IPP

Théorème *(Ipp d'une intégrale impropre)*

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]a,b[$ $(a<b)$ telles que
$$\lim_{x\to a^+} u(x)v(x) \text{ et } \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) \quad \text{existent et sont finies}$$
On a alors : $$\int_a^b u'v \text{ est de même nature que } \int_a^b uv'$$
s'il y a convergence, on a
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$
où $[uv]_a^b$ est défini par
$$[u(t)v(t)]_a^b := \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) - \lim_{x\to a^+} u(x)v(x).$$

Remarque :

Si u et v sont continues en a ou b (par exemple en a) on sait que $\lim_{x\to a^+}$ existe. Il est donc inutile de vérifier les deux limites et on a
$$[u(t)v(t)]_a^b = \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

Exemple 18 :

Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ par IPP :

Posons les fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1([0;+\infty[)$ telles que :
$$\begin{array}{ll} u(t)=t & v'(t)=e^{-t} \\ u'(t)=1 & v(t)=-e^{-t} \end{array}$$

- *Étape 1 :* On a
$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$$
Les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $-\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ont donc même nature.

- *Étape 2 :* L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente vers 1 (exercice), ainsi, on a la
$$\boxed{\text{convergence de } \int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

- *Étape 3 :* La valeur de $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est finalement donnée par la formule
$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0+1 = \boxed{1}$$

Oubli récurrent

Énoncé à appliquer avec attention et en plusieurs étapes. Il est **nécessaire de** vérifier la convergence vers un réel de $\lim_{x\to b, x<b} u(x)v(x)$. En l'absence de cette vérification, deux problèmes peuvent se présenter :

1. La formule peut devenir une forme indéterminée. (cf ex11)
2. Les intégrales peuvent ne pas être de même nature. (cf ex12)

Exemple 19 :

On souhaite déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} t\ln t\,\mathrm{d}t$ en passant par l'IPP suivante :
$$\begin{array}{ll} u'(t)=t & v(t)=\ln t \\ u(t)=\frac{t^2}{2} & v'(t)=\frac{1}{t} \end{array}$$
où u, v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$.

On a
$$\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{2}\ln t = +\infty$$
et
$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = +\infty$$
Cette dernière intégrale étant divergente.
L'expression "de droite" dans l'intégration par partie est donc une forme indéterminée...
On ne peut rien dire sur la convergence avec cette méthode !

■ Exemple 20 :

Considérons $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ et effectuons l'IPP suivante :

$$\begin{array}{ll} u(t)=1 & u'(t)=0 \\ v'(t)=t & v(t)=\frac{t^2}{2} \end{array}$$

$u, v \in \mathcal{C}^1([0;+\infty[)$. De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} uv' = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$$

Si on ne tient pas compte de la divergence de $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)$, on annonce à tort que $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ a la même nature que $\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$, qui est trivialement convergente. Cherchez l'erreur...

Mais quelle solution ?? On passe plutôt à l'IPP sur un segment "classique"...

■ Exemple 21 :

Soit $x>0$. en passant par l'IPP suivante :

$$\begin{array}{ll} u'(t)=t & v(t)=\ln t \\ u(t)=\frac{t^2}{2} & v'(t)=\frac{1}{t} \end{array}$$

---

u, v sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[1;x]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t &= \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int_1^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Il faut maintenant passer à la limite :

$$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = \underbrace{\frac{x^2}{4}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty} \underbrace{(2\ln x - 1)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty} + \frac{1}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

L'intégrale est divergente.

III-3 Changement de variable

III.3-a) Le théorème et son application

Théorème : *Changement de variable dans une intégrale impropre*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, I un intervalle, ainsi que f et ψ deux fonctions telles que :

- *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit continue*
- *$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone*

Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\psi(x))\psi'(x)\,dx$ sont de même nature, avec, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(x))\psi'(x)\,dx$$

où α et β sont définis par

$$\alpha := \lim_{x\to a^+} \psi^{-1}(x) \qquad ; \qquad \beta := \lim_{x\to b^-} \psi^{-1}(x)$$

Remarque :

Avant de passer auxd exemples, notons que l'énoncé peut être donné sous deux formes différentes :

"Montrer que l'intégrale [...] converge."

ou un peu plus poussée :

"Montrer que l'intégrale [...] converge et calculer sa valeur."

Le théorème de changement de variable peut s'utiliser pour l'une ou pour l'autre de ces questions, alors profitons-en pour voir sur les exemples suivants comment peut se rédiger la réponse dans ces deux types d'énoncés. (*1er exemple avec la seule convergence et 2ème exemple avec également la valeur de l'intégrale.)*

■ Exemple 22 :

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$ est une intégrale convergente grâce au changement de variable $x = -\frac{1}{t}$.

On pose le changement de variable $x=-\frac{1}{t}$. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2} > 0$$

Il est donc strictement monotone, donc bijectif sur l'intervalle.

On a de plus

$$t = -\frac{1}{x} \quad et \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}$$

x s'applique aux bornes par limites :

t	1	$+\infty$
u	-1	0

L'intégrale est donc de même nature que

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{(\frac{1}{x})^2}\left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \underbrace{e^x}_{g(x)} \mathrm{d}x$$

on obtient une fonction g **qui est continue** sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0, 1]$). L'intégrale est donc bien convergente, ainsi que par équivalence, l'intégrale de départ.

- **Exemple 23** :

Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t$ converge et vaut 1 par changement de variable $x = \frac{1}{t}$.

On pose le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2} < 0$$

Il est donc strictement monotone, donc bijectif sur l'intervalle. On a de plus

$$t = -\frac{1}{x} \quad et \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}$$

x s'applique aux bornes par limites :

t	0	$+\infty$
u	$+\infty$	0

Sous réserve de convergence de l'une des deux intégrales, par formule de changement de variable, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} \mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-x}}{(\frac{1}{x})^2}\left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x$$

on obtient une fonction g **qui est continue** sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0, 1]$). L'intégrale est donc bien convergente, ainsi que par équivalence, l'intégrale de départ.
De plus, on a déjà vu que l'intégrale obtenue est convergente, ainsi donc, par équivalence, l'intégrale de départ. De plus, par calcul, on a également vu que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = 1$, ce qui donne bien le résultat souhaité.

III.3-b) Cas des fonctions paires et impaires

Propriété

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}(]-a; a[)$. Si f est paire ou impaire, la nature de $\displaystyle\int_0^a f$ est la même que celle de $\displaystyle\int_{-a}^0 f$ avec, en cas de convergence :

- $\displaystyle\int_{-a}^0 f = \int_0^a f$ si f est paire
- $\displaystyle\int_{-a}^0 f = -\int_0^a f$ si f est impaire.

Corollaire

*Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{C}(]-a; a[)$ **paire ou impaire**.*
Alors $\displaystyle\int_{-a}^a f$ converge ssi $\displaystyle\int_0^a f$ converge. De plus, en cas de convergence

- *Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\, dt = 0$*
- *Si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\, dt = 2\int_0^a f(t)\, dt$*

III-4 Bilan des principaux résultats

Soit f continue sur une réunion d'intervalles I ou sur un intervalle $[a, b[$. $b \in]a, +\infty]$. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Action	Hypothèses	Conclusion
Chasles 1	$\displaystyle\int_a^c f$ est convergente $\displaystyle\int_c^b f$ est convergente	$\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
Chasles 2	$\displaystyle\int_a^b f$ converge $c \in [a, b]$	$\displaystyle\int_a^c f$ est convergente $\displaystyle\int_c^b f$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Faussement impropre	b est **fini** $\lim_b f$ existe	$\int_a^b f$ converge.
Linéarité	$\int_I f$ converge $\int_I g$ converge	$\int_I (f+\lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$
IPP 1	u, v de classe $\mathcal{C}^1$ $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x)$ est finie	$\int_a^b u'v$ est de même nature que $\int_a^b uv'$
IPP2	u, v de classe $\mathcal{C}^1$ $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x)$ est finie $\int_a^b u'v$ converge	$\int_a^b uv'$ converge $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
Changement de variable	g continue sur $]a, b[$ $u \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ et u' strictement monotone	$\int_a^b g(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du$ sont de même nature
Changement de variable (suite)	g continue sur $]a, b[$ $u \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ et u' strictement monotone En cas de convergence	$\int_a^b g(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du$

IV Fonctions positives et convergence absolue

Théorème *de positivité*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ tels que

- $a<b$ **(bornes croissantes)**
- *f est continue sur $[a, b[$,*
- *$\int_a^b f$ converge*
- *$f \geqslant 0$ sur $[a, b]$,*

alors $$\int_a^b f \geqslant 0$$

Ordre des bornes

L'hypothèse de bornes croissantes est importante. En effet, si $a > b$ et que f est continue positive sur $[b, a[$ avec convergence de $\int_a^b f$, on a

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \leqslant 0$$

Corollaire *"Comparaison d'intégrales"*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ tels que

- $a<b$ **(bornes croissantes)**
- *f, g sont continues et d'intégrales convergentes sur $[a, b[$,*
- *$f \leqslant g$ sur $[a, b]$,*

alors

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

Théorème *de positivité ... la suite*

Pour $a < b$, soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que

- *f est continue sur $[a, b[$,*
- *f est de signe constant sur $[a, b[$,*
- $\displaystyle\int_a^b f = 0$,

alors f est nulle sur $[a; b[$.

Remarque :

Ici aussi, la deuxième hypothèse est capitale. Il existe des fonctions non nulles d'intégrale nulle. (les aires au dessous et au dessus de l'axe des abscisses se compensent).

Dans la suite, on se donne $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, a<b

Proposition

On se donne $f : [a; b[\to \mathbb{R}$ continue **positive** sur $[a, b[$. Alors

$$\int_a^b f \text{ converge } \Leftrightarrow \quad F : x \in [a; b[\mapsto \int_a^x f \text{ est majorée.}$$

Théorème

On se donne $f, g : [a; b[\to \mathbb{R}$ continues **positives** *sur $[a, b[$ telles que*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \qquad \forall x \in [a; b[$$

Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \quad cv \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \quad cv \text{ et } \quad 0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

$$\int_a^b f \quad \textit{divergente} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\,dt \quad \textit{divergente}$$

? Exercice 1

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t - 1}{t^2}\,dt$ est convergente.

Théorème *de convergence absolue*

On se donne $f : [a; b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (où $a < b$).

$$\int_a^b |f| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f \text{ converge} \\ \displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \end{cases}$$

? Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, $b > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-bt}\,\mathrm{d}t = \frac{b}{a^2 + b^2}$. (avec IPP)

Théorème *sur les fonctions équivalentes*

On se donne $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$ telles que

$$f \sim_b g.$$

avec l'une des deux fonctions de signe constant au voisinage de b. Alors

$$\int_a^b f \quad \textit{est de même nature que} \quad \int_a^b g$$

Exemple 24 :

Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t-e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ converge :

$t \mapsto e^{-t-e^{-t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par continuité de la fonction exponentielle,

$$\frac{e^{-t-e^{-t}}}{e^{-t}} = e^{-e^{-t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} e^0 = 1$$

on a donc

$$e^{-t-e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (déjà fait précédemment !), donc, par équivalence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t-e^{-t}}\,dt$ converge.

Confusion

Ceci ne signifie en aucun cas que les intégrales sont ensuite égales (ou "équivalentes" !)

- Exemple 25 :

On pose $f(t) = \frac{1+t}{t^2}$. On a
$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$
Or, pour tout $x \geq 1$, on a *calcul laissé au lecteur)*
$$\int_1^x f = \frac{3}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}, \quad \text{et} \quad \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x}$$
On voit bien que si $x \to \infty$, on a
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{3}{2} \text{ et } \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \sim 1$$
D'où
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \not\sim \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
et de plus
$$\int_1^{+\infty} f \neq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

V Exemples fondamentaux

Théorème

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ cv en $+\infty$ ssi $\lambda > 0$. Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt$ cv ssi $\lambda > 0$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$

Théorème

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

Par parité de la fonction on obtient également :

Corollaire

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

? Exercice 3

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2t-2}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

(On pensera à se rapprocher, par un changement de variable opportun, d'une intégrale de type $\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$. On trouve $\frac{\sqrt{\pi}}{e}$.)